Chap X

- **Simulations d'expériences aléatoires,**
- **Fluctuation d'échantillonnage.**

<u>*Buts*</u> *: Utiliser un tableur, une calculatrice ou un logiciel pour simuler une expérience aléatoire, la répéter plusieurs fois pour observer la loi des grands nombres. Savoir si un échantillon est représentatif d'un ensemble.*

I Simulations d'expériences aléatoires

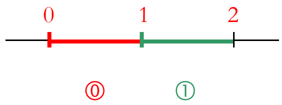
1°) Avec un tableur

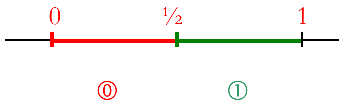
a) 1 dé → = ENT(6*ALEA()) + 1 ou = ENT(6*ALEA() + 1).

b) Somme de 2 dés → = ENT(6*ALEA() + 1) + ENT(6*ALEA() + 1)

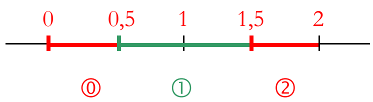
~~= 2 * ENT(6*ALEA() + 1)~~ car cela donnerait des doubles.

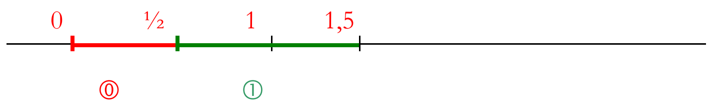
c) Pile ou Face → = ENT(2*ALEA()) ou = ARRONDI(ALEA() ; 0)





d) Pièce truquée → = ARRONDI(2*ALEA() ; 0) ou = ARRONDI(1,5*ALEA() ; 0)





C'est clairement pas une pièce de monnaie. Plutôt une urne 7B / 14R / 7N.

C'est bien une pièce mais avec $p_F = 1/3$ et $p_P = 2/3$. C'est donc bien une pièce truquée.

Faire Exos n°23 et 24 p.210 + Exo résolu n°8 p.203 (lien avec proba → approche statistique)

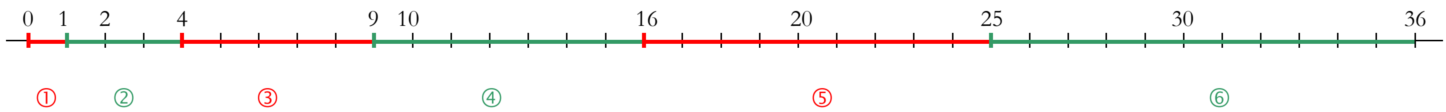
e) Dé truqué

On peut simuler des dés truqués où une face aurait plus de chance de sortir qu'une autre.
La somme des fréquences de tous les événements élémentaires devant être égale à 1, cela doit se faire au détriment d'une (ou plusieurs) face(s).

<u>Par exemple</u> : = ENT (RACINE (36*ALEA())) + 1

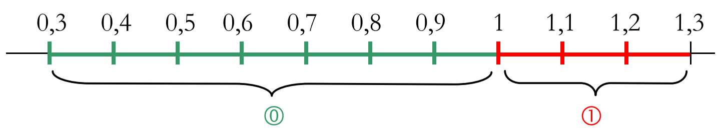
a) Pourquoi obtient-on la simulation d'un dé ?
En effet on obtient soit des 1 ; des 2 ; des 3 ; des 4 des 5 ou des 6.

b) Obtenir les fréquences d'apparition de chaque face.



$\frac{1}{36}$ $\frac{3}{36}$ $\frac{5}{36}$ $\frac{7}{36}$ $\frac{9}{36}$ $\frac{11}{36}$

f) Urne : Expliquez ce que permet de simuler la formule = ENT (ALEA() + 0,3).



Cela permet de simuler un lancer de pièce truquée (7/10 – 3/10) ou le tirage d'une boule d'une urne contenant **3** boules rouges et **7** boules vertes indiscernables au toucher.

2°) Avec une calculatrice   **Faire Exo n°22 p.209**

a) **La fonction RANDOM**, permet de fournir un nombre aléatoire compris entre 0 et 1.

CASIO = $\boxed{\text{MENU}}$ RUN puis $\boxed{\text{OPTN}}$ puis aller dans le menu $\boxed{\text{PROB}}$ puis $\boxed{\text{Ran\#}}$ puis $\boxed{\text{EXE}}$.

Texas Instrument = Touche $\boxed{\text{MATH}}$ puis menu $\boxed{\text{PRB}}$ puis $\boxed{\text{rand}}$ puis $\boxed{\text{ENTER}}$.

b) Partie entière, pour obtenir un entier : CASIO = $\boxed{\text{OPTN}}$ puis $\boxed{\text{NUM}}$ puis $\boxed{\text{Int}}$ puis le nombre.

TI = $\boxed{\text{MATH}}$ puis menu $\boxed{\text{NUM}}$ puis $\boxed{\text{Int}}$ puis le nombre.

c) Dé équiprobable : CASIO = Int (6 x Ran# + 1) ou Int (6 x Ran#) + 1 puis plusieurs fois $\boxed{\text{EXE}}$.

TI = Int (6 x Rand + 1) ou Int (6 x Rand) + 1 puis plusieurs fois $\boxed{\text{ENTER}}$.

d) **Traduire, avec le langage de votre calculatrice, les autres exemples du 1°)**

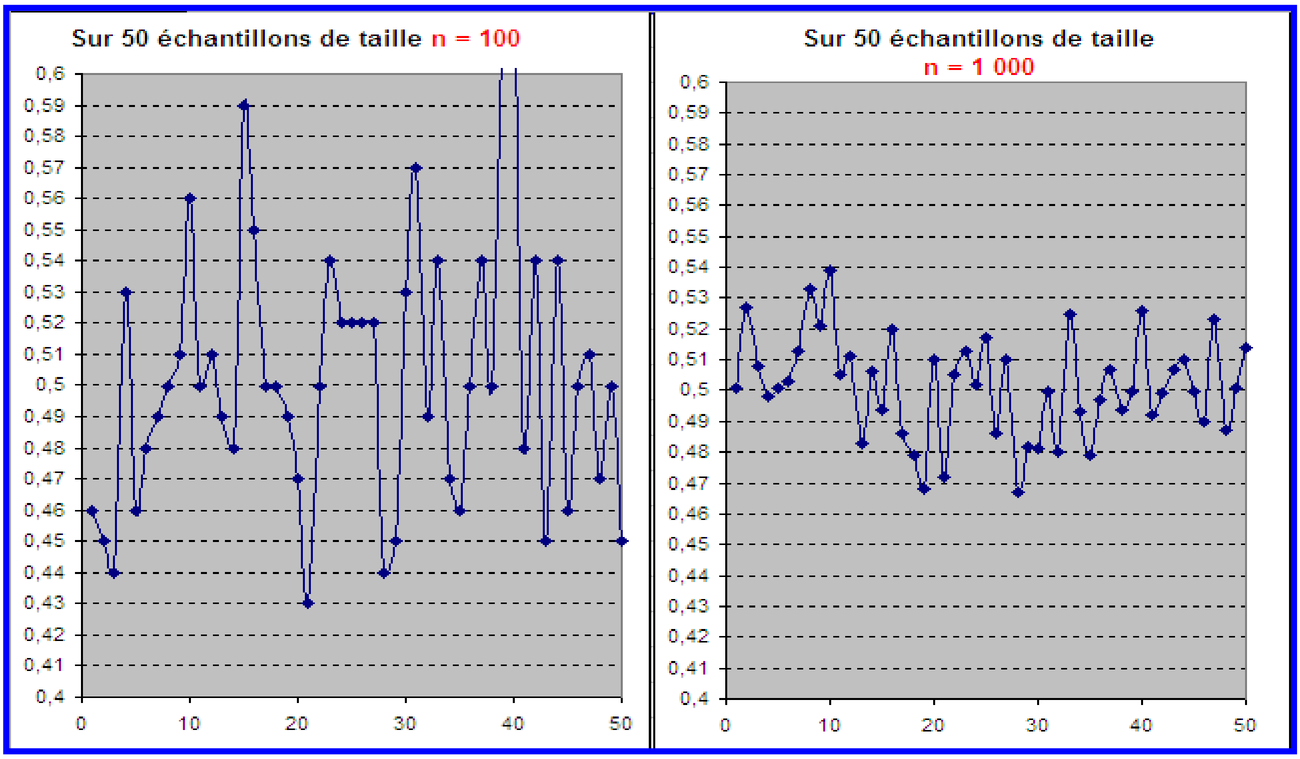
3°) Avec Algobox   **Voir exo corrigé n°4 p.21**

4°) Résumé. On peut illustrer la "loi des grands nombres" énoncée par J. BERNOULLI (1654-1705) qui affirme qu'"**en répétant de façon indépendante un grand nombre de fois une même expérience aléatoire, la fréquence d'un événement se stabilise autour d'une valeur que l'on peut attribuer comme probabilité de cet événement".** **Voir TD n°1**

II Fluctuation d'échantillonnage

1°) Définition : En statistiques, un **échantillon de taille n** est la liste des n résultats obtenus par n répétitions indépendantes de la même expérience.
Quand l'expérience est à 2 issues (0/1 ou P/F) (ou plus généralement succès avec une proba p et échec avec une proba $1 - p$), on dit que l'échantillon relève du **modèle de Bernoulli**.

2°) Exemple : **Voir TD n°2 (Pile ou Face)** **et feuille avec les 4 graphiques**.
On lance une pièce bien équilibrée. On répète ce lancer 100 fois et on obtient 1 échantillon de taille 100 puis on répète ces 100 lancers 49 fois pour obtenir en tout 50 échantillons.
Ces échantillons relèvent bien du modèle de Bernoulli (le vérifier).
On constate que la fréquence d'obtention d'un pile **fluctue avec des écarts + ou – importants** autour d'une valeur qui semble être voisine de 1/2.
On constate aussi que plus la taille de l'échantillon est grande, plus cette fluctuation se réduit et se recentre autour de 0,5 qui est la proportion effective ou théorique.
C'est l'illustration de la loi des grands nombres.



III Intervalle de fluctuation au seuil de 95%

Voir les 4 graphiques au verso du TD2

1°) Propriété : Conditions : il faut $p \in [0,2 ; 0,8]$ et $n \geq 25$.

On réalise une expérience aléatoire à 2 issues où la probabilité théorique d'un succès est p.

Soit un échantillon bernoullien de taille n et f la fréquence des succès dans cet échantillon.

L'intervalle de fluctuation de la fréquence au seuil de 95% est $I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

Autrement dit : $f \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ et on peut dire que dans environ 95% des cas, la fréquence observée d'un succès après n répétitions, est de p à $^{+}/_{-} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Les statisticiens sont donc capables de calculer, *dans les conditions citées plus haut*, avec une marge d'erreur d'*environ* 5%, une fourchette dans laquelle se situera la fréquence de succès d'un échantillon, et ce, avant de le réaliser et uniquement à l'aide de sa taille et de la probabilité attendue.

2°) Ex : Un joueur tire une carte d'un jeu complet puis la remet dedans.

Il gagne s'il obtient un ♥. Il renouvelle cette expérience n fois.

La probabilité de gagner est donc à chaque fois de p = 0,25 (probabilité théorique) et la répétition des n tirages (assimilée à un échantillon de taille n) relève bien du modèle de Bernoulli.

Calculez les bornes des intervalles et analysez les affirmations ci-dessous.

- La fréquence d'apparition d'un ♥, dans un échantillon de taille n = 100, fluctue, dans 95% des cas, dans l'intervalle [0,15 ; 0,35]. Traduction : quelqu'un qui jouerait 100 fois à ce jeu et qui gagnerait moins de 15 fois (*ou plus de 35 fois mais là il ne s'en plaindrait pas*) pourrait penser que le jeu de cartes qu'on lui tend est truqué.
- La fréquence d'apparition d'un ♥, dans un échantillon de taille n = 10 000, fluctue, dans 95% des cas, dans l'intervalle [0,24 ; 0,26]. Traduction : quelqu'un qui jouerait 10 000 fois à ce jeu et qui gagnerait entre 2 400 fois et 2 600 fois conclurait que cet écart par rapport à la valeur théorique (*2 500 ici*) est le seul fait du hasard et pourrait conclure que le jeu de cartes qu'on lui tend n'est pas truqué.