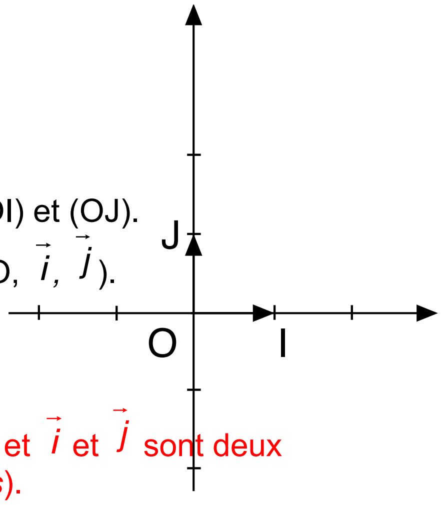
REPERAGE DANS LE PLAN

I. Repère du plan



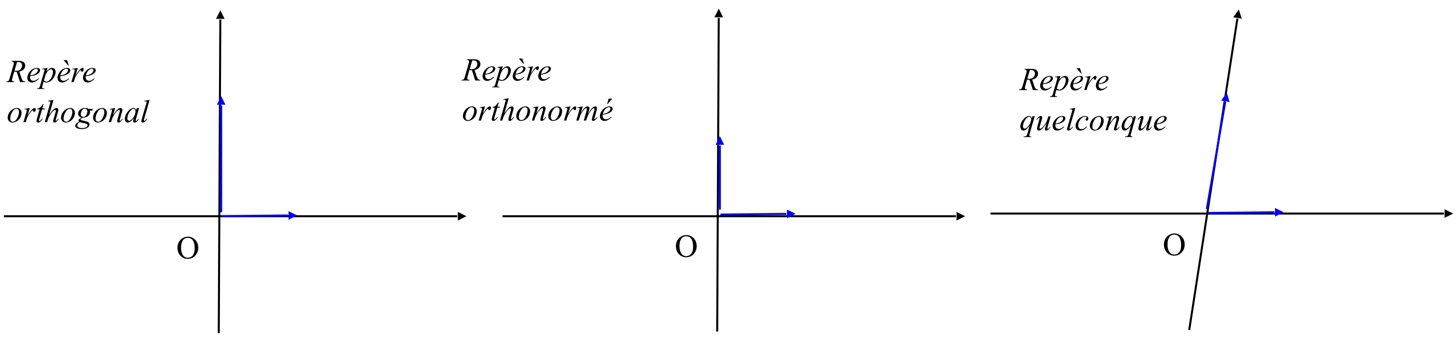
Trois points distincts deux à deux O, I et J du plan forment un repère, que l'on peut noter (O, I, J).
L'origine O et les unités OI et OJ permettent de graduer les axes (OI) et (OJ).
Si on pose $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$, alors ce repère se note également $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Définitions :

- On appelle **repère du plan** tout triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où O est un point et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont deux vecteurs non **colinéaires** (*Non « portés » par des droites parallèles*).

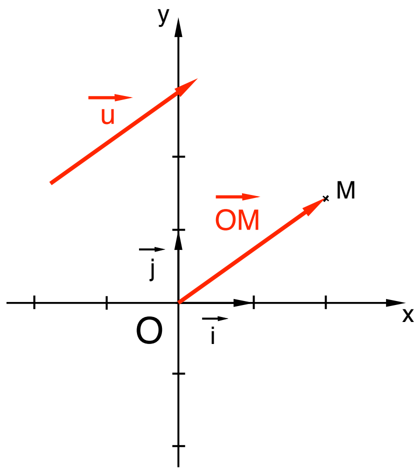
- Un repère est dit **orthogonal** si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont des directions perpendiculaires.

- Un repère est dit **orthonormé** si il est orthogonal et si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont de norme 1.



II. Coordonnées d'un vecteur

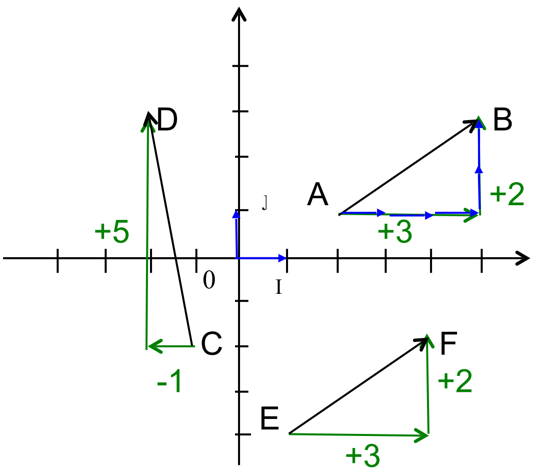
Définition :
Soit M un point quelconque d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et un vecteur $\vec{u}$ tel que : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
Les **coordonnées du vecteur** $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M.



Si M $(x\ ;\ y)$, on note : $\vec{u}(x\ ;\ y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Méthode : Déterminer les coordonnées d'un vecteur par lecture graphique

Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ par lecture graphique :



Voir la vidéo

Pour aller de A vers B, on effectue une translation de 3 carreaux vers la droite (+3) et une translation de 2 carreaux vers le haut (+2). On trace ainsi un *« chemin »* de vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ mis bout à bout reliant l'origine et l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Ainsi $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont donc $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. De même, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Propriété :
Soit A et B deux points de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ dans un repère (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$)

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Démonstration :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

Comme $-\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{OB}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} -x_A \\ -y_A \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$

alors $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

III. Coordonnées du milieu d'un segment

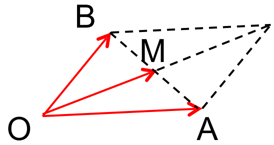
Propriété :
Soit A et B deux points de coordonnées $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ dans un repère (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$).

Le milieu M du segment [AB] a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_A + x_B) \\ \frac{1}{2}(y_A + y_B) \end{pmatrix}$

Voir la vidéo

Démonstration :
Considérons le parallélogramme construit à partir de O, A et B. Soit M son centre.

Alors $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

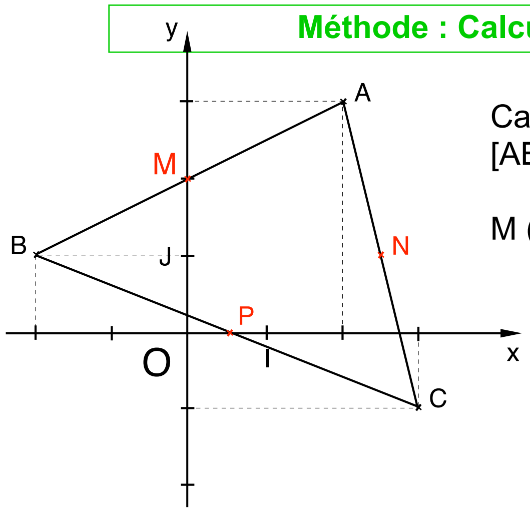


$\overrightarrow{OM}$ (ou M) a donc les mêmes coordonnées que celles du vecteur $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

soit : $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_A + x_B) \\ \frac{1}{2}(y_A + y_B) \end{pmatrix}$

Voir la vidéo

Méthode : Calculer les coordonnées du milieu d'un segment



Calculer les coordonnées de M, N et P milieux respectifs de [AB], [AC] et [BC].

M $\left(\frac{2+(-2)}{2} ; \frac{3+1}{2}\right) = (0 ; 2)$; N $\left(\frac{2+3}{2} ; \frac{3+(-1)}{2}\right) = (2{,}5 ; 1)$

P $\left(\frac{-2+3}{2} ; \frac{1+(-1)}{2}\right) = (0{,}5 ; 0)$

IV. Distance dans un repère orthonormé

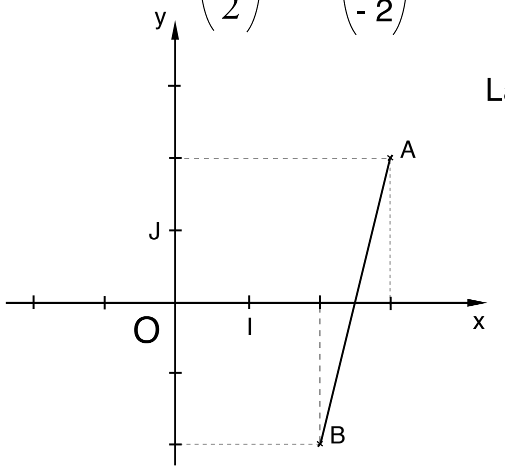
Propriété :
Soit A et B deux points de coordonnées $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ dans un repère ***orthonormé*** $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Voir la vidéo

alors : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ *(Cette propriété est une conséquence du théorème de Pythagore)*

Méthode : Calculer une distance dans un repère orthonormé

Soit A $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et B $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ deux points dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



La distance AB (ou norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$) est égale à :

$AB = \sqrt{(2-3)^2 + (-2-2)^2}$
$= \sqrt{1+16}$
$= \sqrt{17}$

Voir la vidéo