Chap IV — Factoriser, développer pour résoudre des problèmes

I Expressions algébriques

En classe Activités 1-2-3 et 4 p.82-83
A la maison faire Exos résolus 1 et 2 p.85 + n°5 p.88

Le calcul algébrique consiste à transformer des expressions algébriques pour les mettre sous différentes formes.

on développe

$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
$k(a + b) = ka + kb$

on factorise

Développer, c'est transformer un produit de facteurs en somme.
Factoriser, c'est transformer une somme en produit de facteurs.

Exemple : $-2x^3 + 12x^2 + 3x - 18$ est une forme développée du produit $(-2x^2 + 3)(x - 6)$.
$(4x - 1)(-x + 3)$ est une forme factorisée de la somme $-4x^2 + 13x - 3$.
$-3x^2 + 5x - 7$ est la forme réduite de $3 - 2x^2 + 3x - x^2 + 2x - 10$.

Identités remarquables :
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

II Équations.

a) Les équations du type $ax + b = 0$ (avec $a \neq 0$)

A la maison faire Exos n°77-81 et 82 p.96

Ce sont des équations du premier degré (l'inconnue x apparaît à la puissance 1)

Une seule solution $x = -\frac{b}{a}$. On note $S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

Ex : Soient les fonctions affines f et g définies par $f(x) = 5(x + 2)$ et $g(x) = 7x - 1$ et Cf et Cg leur représentations graphiques.
Déterminer les coordonnées des points d'intersection de Cf avec Cg.

① f et g étant affines, Cf et Cg sont des droites qui, si elles se coupent, se coupent en un seul pt

② $M(x ; y) \in Cf \cap Cg$ ssi $f(x) = g(x)$ *on développe*
$5x + 10 = 7x - 1$ *on transpose*
$-2x = -11$ *on simplifie*
$x = \frac{11}{2}$

③ Cf et Cg ne se coupent qu'en un seul pt $M\left(\frac{11}{2} ; \frac{75}{2}\right)$ *on conclue et on peut vérifier avec sa calculatrice en traçant les 2 droites et en cherchant les coord du point d'intersection.*

b) Les équations produit.

Ex : Résoudre dans ℝ $\boxed{x^2 + 4x + 4 = (x + 2)(3x - 1)}$.

$(x + 2)^2 = (x + 2)(3x - 1)$
$(x + 2)^2 - (x + 2)(3x - 1) = 0$ *on met $(x + 2)$ en facteur*
$(x + 2)\left[(x + 2) - (3x - 1)\right] = 0$ *on supprime les ( )*
$(x + 2)(x + 2 - 3x + 1) = 0$ *on simplifie*

Cela revient **donc** à résoudre : $\boxed{(x + 2)(-2x + 3) = 0}$

Un produit est nul si et seulement si un des facteurs est nul.
Donc soit $x + 2 = 0$ et alors $x = -2$
soit $-2x + 3 = 0$ et alors $x = 3/2$

L'équation de départ admet donc 2 solutions $\boxed{S = \{-2 ; 1{,}5\}}$ *On peut le vérifier.*

A la maison faire Exos n°87-88-89-91-92 p.96-97

c) Les équations du type $x^2 = a$.

x^2 étant toujours ⊕ le signe de a sera très important
- si $a < 0$ incompatibilité des signes donc $S = \varnothing$
- si $a = 0$ une seule solution 0 donc $S = \{0\}$
- si $a > 0$ deux solutions opposées $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ donc $S = \{\sqrt{a}\,;\,-\sqrt{a}\}$

Ex 1 : Résoudre dans ℝ l'équation : $(2x-1)^2 = 16$

Ce carré est égal à 16 ssi $(2x-1)$ est égal à 4 ou a – 4
d'où, $2x - 1 = 4$ et alors $x = 5/2$
ou $2x - 1 = -4$ et alors $x = -3/2$

Donc $\boxed{S = \{5/2\,,\,-3/2\}}$

Autre méthode : $(2x-1)^2 = 16$ ssi $(2x-1)^2 - 4^2 = 0$
ssi $[(2x-1)+4]\,[(2x-1)-4] = 0$
ssi $(2x+3)(2x-5) = 0$
d'où $2x + 3 = 0$ et alors $x = -3/2$
ou $2x - 5 = 0$ et alors $x = 5/2$
Donc $\boxed{S = \{5/2\,,\,-3/2\}}$

Ex 2 : Résoudre dans ℝ l'équation : $(x+3)^2 = -4$

Un carré ne peut jamais être négatif donc $(x+3)^2$ ne sera jamais égal à – 4 d'où $\boxed{S = \varnothing}$

A la maison faire Exo n°102 p.98

III Exemple d'utilisation de différentes écritures d'une fonction

Soit la fonction f définie sur ℝ par $\boxed{\mathbf{f(x) = 50x^2 - 32 - 3\,(5x-4)\,(3x+2)}}$. On note E_1 cette expression.

1°) a) Factoriser l'expression $50x^2 - 32$.
b) En déduire une expression factorisée, que l'on notera E2, de f(x).

2°) a) Développer puis réduire $f(x)$. On notera E_3 ce dernier résultat.
b) Développer l'expression E_2 obtenue au 1°b) puis conclure.

3°) On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.
Choisir, parmi E_1 E_2 et E_3, l'expression qui se prête le mieux pour :
- a) calculer l'image de $\sqrt{7}$ par f,
- b) calculer f(0,8).
- c) déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe (Oy),
- d) déterminer les coordonnées du (des) point(s) d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe (Ox),
- e) déterminer le(s) antécédent(s) de – 8,
- f) Soit la fonction g définie par $g(x) = 6x$. Déterminer le(s) point(s) d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec $\mathcal{C}_g$
- g) *retrouvez graphiquement tous ces résultats.*

Solution :

1°) a) $50x^2 - 32 = 2\,(25x^2 - 16)$
$= 2\,[(5x)^2 - 4^2]$
$= 2\,(5x+4)\,(5x-4)$

b) $\boxed{f(x) = 50x^2 - 32 - 3\,(5x-4)\,(3x+2)}$ ← E_1
$= 2\,(5x+4)\,(5x-4) - 3\,(5x-4)\,(3x+2)$
$= (5x-4)\,[2\,(5x+4) - 3\,(3x+2)]$
$= (5x-4)\,(10x + 8 - 9x - 6)$
$\boxed{f(x) = (5x-4)\,(x+2)}$ ← E_2

2°) a) $f(x) = 50x^2 - 32 - 3\,(5x-4)\,(3x+2)$
$= 50x^2 - 32 - 3\,(15x^2 + 10x - 12x - 8)$
$= 50x^2 - 32 - 45x^2 - 30x + 36x + 24$
$= 5x^2 + 6x - 8$

b) $(5x-4)\,(x+2) = 5x^2 + 10x - 4x - 8 = 5x^2 + 6x - 8$.
on obtient le même résultat qu'au 2°) a)
$\boxed{f(x) = 5x^2 + 6x - 8}$ ← E_3

3°) a) $f(\sqrt{7}) = 5(\sqrt{7})^2 + 6\sqrt{7} - 8$
$= 5 \times 7 + 6\sqrt{7} - 8$
$= 27 + 6\sqrt{7}$

b) $f(0{,}8) = (5 \times 0{,}8 - 4) \times (0{,}8 + 2)$
$= 0 \times 2{,}8$
$= 0$

c) Le point K d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe (Oy) s'obtient en calculant f(0).
f(0) = 5 x 0² + 6 x 0 – 8 = – 8
Il y a donc un seul pt d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe (Oy) : $\boxed{K\ (0\ ;-8)}$

d) Les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe (Ox) s'obtiennent en résolvant l'équation f(x) = 0
soit (5x – 4) (x + 2) = 0
ce produit est nul ssi l'un des facteurs est nul
donc soit 5x – 4 = 0 et alors x = 0,8.
soit x + 2 = 0 et alors x = – 2.
Il y a donc 2 pts d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe (Ox) : $\boxed{R\ (0{,}8\ ;0)\ \text{ et }\ S\ (-2\ ;0)}$

e) Le(s) antécédent(s) de – 8 par f s'obtiennent en résolvant l'équation f(x) = – 8. On va prendre E_3
soit $5x^2 + 6x - 8 = -8$
$5x^2 + 6x = 0$
$x\,(5x + 6) = 0$
cette équation produit admet 2 solutions que l'on obtient en annulant chaque facteur.
soit x = 0 soit x = – 6/5 = – 1,2
et donc – 8 admet 2 antécédents : 0 et – 1,2.

f) Il s'agit de résoudre l'équation f(x) = g(x) soit $5x^2 + 6x - 8 = 6x$ *encore une fois avec* E_3
$5x^2 - 8 = 0$
$x^2 = 8/5 = 1{,}6$ d'où $x = \sqrt{1{,}6}$ ou $-\sqrt{1{,}6}$

Conclusion : $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent en 2 points T et U d'abscisses respectives $\sqrt{1{,}6}$ et $-\sqrt{1{,}6}$.
Pour leurs ordonnées, vu que f(x) = g(x), on va prendre g(x) qui est bcp plus simple ce qui donne : $\boxed{T\ (-\sqrt{1{,}6}\ ;-6\sqrt{1{,}6})\text{ et }U\ (\sqrt{1{,}6}\ ;6\sqrt{1{,}6})}$.

g)