Chap. VI **GEOMETRIE DANS L'ESPACE**

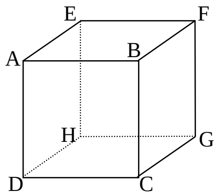
I Représentation dans l'espace
II Les règles d'incidence (d'intersection)
III Parallélisme dans l'espace

I Représentation dans l'espace

Fiche d'exercices n°1

Vous avez appris au collège à dessiner des patrons de différents solides, à construire ces solides, à calculer leur volume, à dessiner ces objets en perspective cavalière … Liste des objets connus : **Voir n°2 p.260 + n°2 p.262**

Rappel : Lorsqu'un objet est représenté en perspective cavalière, l'alignement, l'ordre des points et le parallélisme des droites est conservé. De même le milieu d'un segment sera toujours placé au milieu du segment représenté. Par contre les angles et les longueurs -donc les aires- ne sont pas conservés **sauf si on les mesure dans des plans frontaux**.
Prenez l'exemple d'un cube. Les diagonales [BH] et [DF], qui ont en réalité la même longueur, sont représentés par des segments de longueur différente (du fait de la perspective cavalière). Par contre O, leur intersection -c'est le centre du cube-, est malgré tout placé au milieu de ces 2 segments. De même la face BCFG est un carré et est pourtant représentée par un parallélogramme.
Les angles $\widehat{CBF}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ABF}$ sont droits or seul celui qui est dans le plan frontal (c'est à dire $\widehat{ABC}$) a une mesure égale à 90° les autres sont déformés.



II Les règles d'incidence

pour le b) c) et d), s'aider des illustrations p.266

Fiche d'exercices n°2 + Fiche INTERESP

a) règle 1 : Par trois points non alignés A, B et C passe un seul plan. Ce plan est noté (ABC).
règle 2 : Si A et B sont 2 points distincts d'un plan P, tous les points de la droite (AB) appartiennent au plan P.
On dit que la droite (AB) est incluse (ou contenue) dans le plan P et on note (AB) $\subset$ P.

b) Position relative de deux plans

Deux plans distincts sont :

- soit strictement parallèles si leur intersection est vide (ex : (ABFE) et (DCGH))
- soit sécants et leur intersection est une droite (ex : (ABGH) et (EFCD) dont l'intersection est la droite // (AB) passant par O centre du cube).

CONCLUSION : **L'intersection de deux plans (distincts non parallèles) ne peut jamais être un point ! !**

c) Position relative de deux droites

Contrairement à ce qui se passe en géométrie plane, deux droites de l'espace qui n'ont aucun point commun ne sont pas forcément parallèles. Il faut introduire la notion de droites COPLANAIRES (*traduction = dans un même plan*).
Deux droites distinctes sont :

- soit strictement parallèles lorsqu'elles sont COPLANAIRES et que leur intersection est vide. (ex : (DC) et (EF)).
- soit sécantes lorsqu'elles sont COPLANAIRES et que leur intersection est un point. (ex : (AB) et (AE)).
- soit NON COPLANAIRES et alors leur intersection est vide. (ex : (AB) et (EC)).

CONCLUSION : **Pour que deux droites de l'espace soient sécantes, elles doivent être coplanaires et non parallèles**

d) Position relative d'une droite et d'un plan

Soit une droite et un plan. La droite est :

- soit contenue dans ce plan.
- soit strictement parallèle à ce plan lorsque leur intersection est vide. (ex : (AF) // (DCGH)).
- soit sécante à ce plan lorsqu'elle le coupe en un point. (ex : (AG) coupe (DBFH) en O centre du cube).

CONCLUSION : **Pour qu'une droite et un plan soient sécants (*en un point*), il faut que la droite soit extérieure au plan et qu'elle ne soit pas parallèle au plan**.

e) Méthode pour rédiger

Lorsque l'on cherche l'intersection entre deux "objets" de l'espace, il est souhaitable de commencer par expliquer ce que sera cette intersection :

- un point, s'il s'agit de l'intersection d'un plan et d'une droite non parallèle au plan,
- un point, s'il s'agit de l'intersection de deux droites COPLANAIRES et non parallèles,
- une droite, s'il s'agit de l'intersection de deux plans distincts et non parallèles.

III Parallélisme dans l'espace

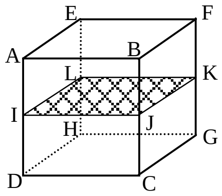
e) Définitions

- Par convention, on dit que deux droites confondues (ou que deux plans confondus) sont parallèles de même qu'une droite contenue dans un plan est parallèle à ce plan. Cette convention existe aussi en géométrie plane.

- Si deux droites sont parallèles à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles (comme en en géométrie plane !). *Cette propriété qui peut paraître évidente est très souvent utile pour prouver que deux droites de l'espace sont parallèles. On montre en effet que les deux droites sont parallèles à une troisième (qui sert uniquement d'intermédiaire).*

- Si deux plans sont parallèles à un même troisième alors ils sont parallèles entre eux. *Encore une fois, cette propriété évidente est très souvent utile pour prouver que deux plans sont parallèles. On montre en effet que les deux plans sont parallèles à un plan auxiliaire.*

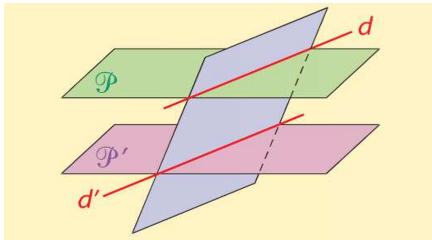
ATTENTION : **Des droites de l'espace parallèles à un même plan ne sont pas forcément parallèles entre elles.**



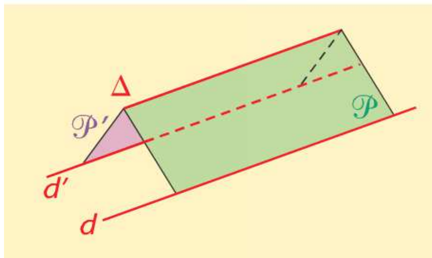
Prouvons-le à l'aide du contre-exemple suivant :
Les droites (AF) (EB) et (HD) sont évidemment parallèles au plan (IJKL) (*plan passant par les milieux des arêtes latérales*) pourtant il est tout aussi évident que ces droites ne sont pas parallèles.

f) Parallélisme entre droites

- Si P et P' sont deux plans parallèles, alors tout plan Q qui coupe P coupe aussi P' et les droites d'intersection sont parallèles.



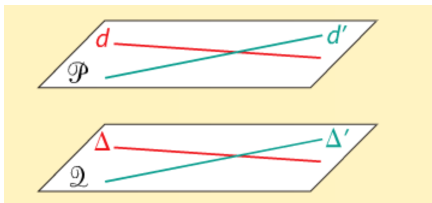
- **Théorème ''du toit''**
  D et D' sont deux droites parallèles.
  P est un plan contenant D, et P' un plan contenant D'.
  Si, en outre, les plans P et P' sont sécants, alors la droite Δ d'intersection de ces plans est parallèle à D et à D'.



g) Parallélisme entre plans

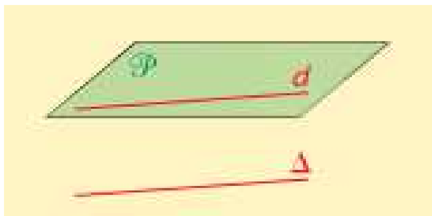
- Pour que deux plans soient parallèles, il suffit **qu'il existe deux droites sécantes** de l'un qui soient parallèles à l'autre.

  C'est une propriété importante qui montre qu'il faut ''tester'' avec ***deux droites sécantes*** *de P et pas avec une seule. En effet, dans le cube, (DH) // (BFGC) et (DH) // (AEFB) pourtant (BFGC) n'est évidemment pas parallèle à (AEFB).*



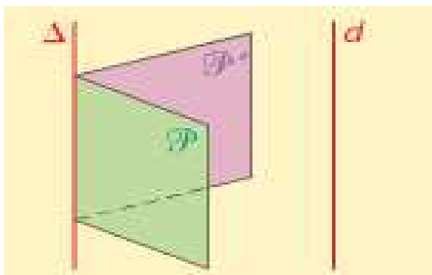
h) Parallélisme entre droite et plan

- **Droite parallèle à un plan**
  Pour qu'une droite D soit parallèle à un plan P, il suffit qu'elle soit parallèle à une droite D' de P.



- **Droite parallèle à deux plans sécants**
  Soient deux plans P_1 et P_2 sécants selon la droite D, toute droite parallèle à D est parallèle aux deux plans.

  Cette propriété est utile quand il s'agit de prouver qu'une droite est parallèle à 2 plans. Au lieu de prouver qu'elle est parallèle à P_1 et à P_2 on se contente de prouver qu'elle est parallèle à leur intersection.



Faire n°61 à 85 p.278-279