Chap VII

- Sens de variation d’une fonction, classement d'images,
- Extremum,
- Fonctions affines (sens de variation et signe).

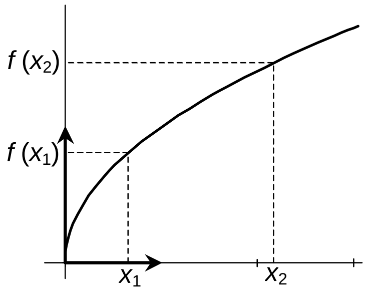
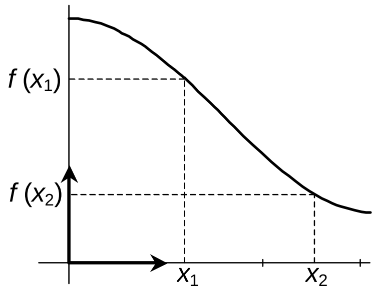
I ACTIVITES D'INTRODUCTION

Récipients / Le promeneur / Point mobile sur un triangle
Commencer en classe à finir à la maison

II SENS de VARIATIONS d'une FONCTION

voir p.58 + exo n°1 p.59

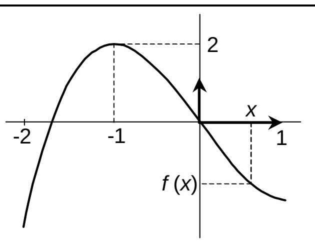
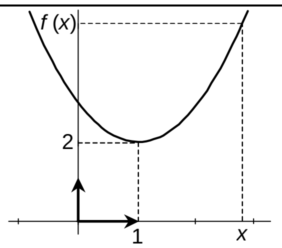
flécher les axes et nommer l’origine du repère.

COURBE		
OBSERVATION DE LA COURBE	Pour $x \in [0 ; 3]$, on remarque que la courbe "monte" : 2 nombres et leurs images sont toujours dans le même ordre	Pour $x \in [0 ; 3]$, on remarque que la courbe "descend" : 2 nombres et leurs images sont toujours dans l'ordre INVERSE
TRADUCTION MATHS	Quels que soient x_1 et x_2 tels que $0 \leq x_1 < x_2 \leq 3$ on a $f(x_1) < f(x_2)$	Quels que soient x_1 et x_2 tels que $0 \leq x_1 < x_2 \leq 3$ on a $f(x_1) > f(x_2)$
PROPRIETE DE LA FONCTION	On dit que la fonction f est **strictement croissante sur** [0 ; 3]	On dit que la fonction f est **strictement décroissante sur** [0 ; 3]

Autrement dit, une fonction est croissante quand *y* augmente lorsque *x* croit et est décroissante quand *y* diminue alors que *x* croit.

III EXTREMUM d'une FONCTION

voir bas de la p.58 + exo n°2 p.59

	COURBE	OBSERVATION de la COURBE	TRADUCTION MATHEMATIQUE	PROPRIETE de la FONCTION
MAXIMUM		Pour $x \in [-2 ; 1]$, la plus grande valeur que prend $f(x)$ est … Cette valeur est obtenue pour x = …	Quel que soit x tel que $-2 \leq x \leq 1$ on a $f(x) \leq 2$ et $2 = f(-1)$	On dit que, sur [−2 ; 1], la fonction f atteint un **maximum** égal à 2 quand $x = -1$.
MINIMUM		Pour $x \in [-1 ; 3]$, la plus petite valeur que prend $f(x)$ est 2. Cette valeur est obtenue pour $x = 1$.	Quel que soit x tel que $-1 \leq x \leq 3$ on a $f(x) \geq 2$ et $2 = f(1)$	On dit que, sur [−1 ; 3], la fonction f atteint un **minimum** égal à 2 quand $x = 1$.

Il y a plusieurs façons de faire mais le but est toujours le même : prouver que $f(x)$ est toujours plus petit qu’un nombre (MAXIMUM) ou plus grand qu’un nombre (MINIMUM).

Exemples de recherche d'extremum

❶ Soit f la fonction définie sur ℝ par $x \longmapsto 7 - (x + 3)^2$.

Il est clair que pour tout réel x, $(x + 3)^2 \geq 0$

donc $-(x + 3)^2 \leq 0$

et $7 - (x + 3)^2 \leq 0 + 7$

et finalement, $f(x) \leq 7$

↳ = qd x vaut – 3.

On vient de démontrer que f admet **sur** ℝ un maximum **égal à** 7 **quand** $x = -3$

❷ On aurait sensiblement la même chose avec $f(x) = -4 - \sqrt{x + 1}$

ou $g(x) = (x + 2)^2 - 5$

❸ Soit f la fonction définie sur ℝ par $x \longmapsto x^2 - 6x + 5$.

A l'aide de la calculatrice, tracer sa représentation graphique. Il **semblerait** que f admette comme minimum le nombre – 4 qd $x = 3$.

C'est ce que nous allons **démontrer**.

Pour tout réel x, déterminons le signe de $f(x) - (-4)$ afin de classer ces 2 nombres :

$f(x) - (-4) =$

$=$

donc $f(x) + 4 \geq 0$

donc $f(x) \geq -4$ pour tout $x \in$ ℝ

Finalement f admet sur ℝ un minimum **égal à − 4 quand x = 3.**

IV Fonctions affines

1°) Définition

Soient a et b 2 réels donnés. Lorsqu'à chaque réel x on associe le nombre ax + b, on définit une fonction affine f et on note $f(x) = ax + b$.

2°) Représentation graphique **Recopier le haut de la p.60**

f est représentée graphiquement par la droite d d'équation $y = f(x)$ soit $y = \mathbf{a}x + \mathbf{b}$.

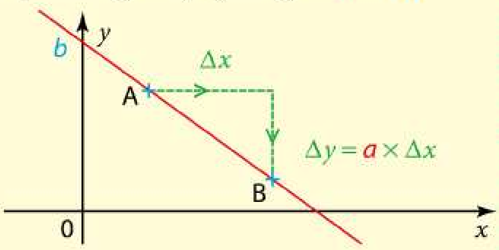
- **b** s'appelle **l'ordonnée à l'origine** de d.

La droite d passe par le point (0 ; **b**).

- **a** s'appelle **le coefficient directeur** de d.

Pour deux points distincts A et B de d,

$$a = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



En particulier, entre deux points de d, si x augmente de 1, y varie de a.

Cas particuliers

Si $a = 0$, $f(x) = b$ et la fonction f est constante sur ℝ.

Si $b = 0$, $f(x) = ax$ et f est une fonction linéaire traduisant une situation de proportionnalité et représentée par une droite passant par l'origine du repère.

3°) Exemples **Exos résolus n°3 et 4 p.61**

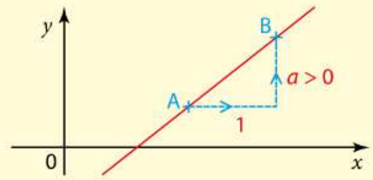
4°) Sens de variation et signe d'une fonction affine **Recopier bas p.60** + **Exo résolu n°6 p.61**

Activité Signe de ax + b

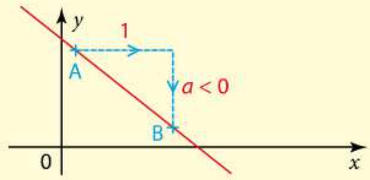
Propriété démontrée à l'exercice 114

Propriété Soit f la fonction affine $x \mapsto ax + b$ (a et b nombres réels).

Si $a > 0$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$



Si $a < 0$, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$



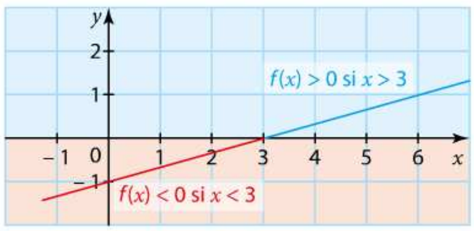
Du sens de variation de f, on peut déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

EXEMPLE 1 Soit $f(x) = \frac{1}{3}x - 1$ pour tout réel x.

$a = \frac{1}{3}$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus $f(3) = 0$. On en déduit que

$f(x) < 0$ si $x < 3$ et $f(x) > 0$ si $x > 3$.

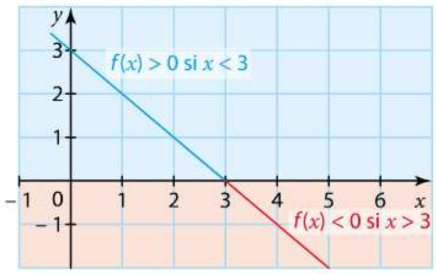


EXEMPLE 2 Soit $f(x) = -x + 3$ pour tout réel x.

$a = -1$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

De plus $f(3) = 0$. On déduit que

$f(x) > 0$ si $x < 3$ et $f(x) < 0$ si $x > 3$.



5°) Bilan : 2 cas pour obtenir le signe de **ax + b** selon le signe de a

a > 0

Valeurs de x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
Variations de ax + b	↗	0	↗
Signe de ax+b	−	0	+

a < 0

Valeurs de x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
Variations de ax + b	↘	0	↘
Signe de ax+b	+	0	−