Chap VIII

LES VECTEURS

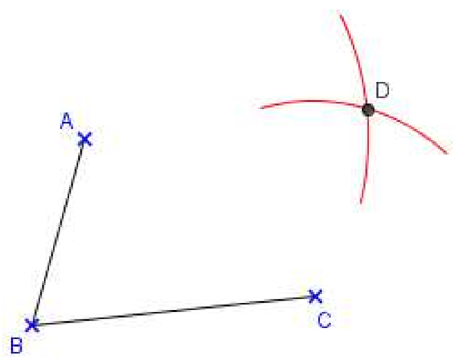
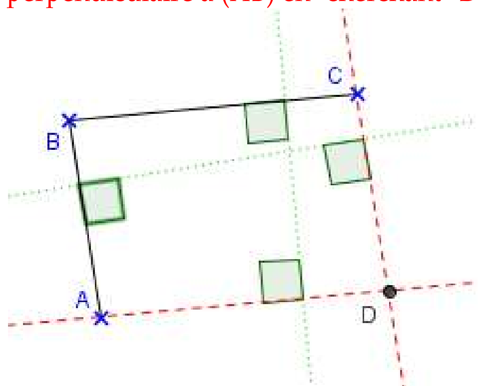
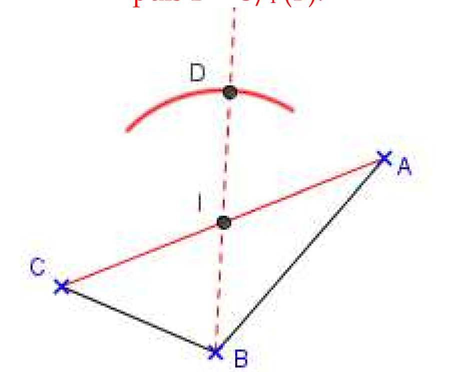
- *Vecteurs et translations,*
- *Coordonnées d'un vecteur,*
- *Opérations avec des vecteurs.*

Les vecteurs sont des outils très puissants :

- *pour démontrer par ex. que des points sont alignés ou que des droites sont parallèles,*
- *pour construire des figures, pour les transformer,*
- *en mécanique (forces ….) et en physique (électricité …)*

I Rappels de géométrie. **n°1 p.308** + **Faire n°84 p.331**

a) ABCD doit être un parallélogramme. Placez le point manquant avec les instruments indiqués.

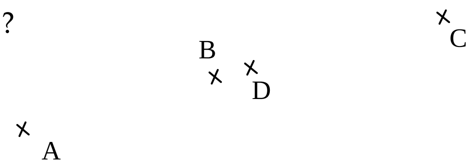
Un compas *(report de longueur)*	Une équerre et une règle *(//)*	Une règle et un compas *(sym/I)*
 Inter. des arcs de cercle de centre A (resp. C) et de rayon BC (resp. AB)	Glisser l'équerre le long d'une perpendiculaire à (AB) en "cherchant" D 	Placer I, milieu de [AC] (idéalement à l'aide de la médiatrice de [AC]) puis D = $S_{/I}$ (B). 

b) ABCD est un parallélogramme ssi les côtés sont 2 à 2 //. C'est à dire ssi (AB)//(CD) **et** (AD)//(BC).

ou ssi les diagonales [AC] et [BD] se coupent en leurs milieux.

ou ssi 2 côtés opposés sont parallèles, de même longueur et les 4 pts dans le bon ordre.

c) Peut-on dire que ABCD est un parallélogramme dans le cas suivant ?
Oui, les diagonales [AC] et [BD] se coupent en leurs milieux !
et ABDC ? Non, [AD] et [BC] ne se coupent pas en leurs milieux !



II Introduction et définitions. **Faire Acti 1 p.310**

Exo résolu n°1 p.313 + Faire n°21 à 24 p.325 + n°31 p.326

a) Définition 1 :

> **La translation qui transforme A en B associe à tout point M un point N tel que le quadrilatère ABNM soit un parallélogramme** (éventuellement aplati).
> **On dit alors que N est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.**
> On note : $t_{\overrightarrow{AB}}(M) = N$ ou $t_{\overrightarrow{AB}} : M \mapsto N$.

b) Définition 2 :

> **2 vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si la translation qui transforme A en B transforme aussi C en D.**

Autrement dit :

c) Propriété 1 :

> **$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si le quadrilatère ABDC est un parallélogramme.**

Autrement dit :

Propriété 2 :

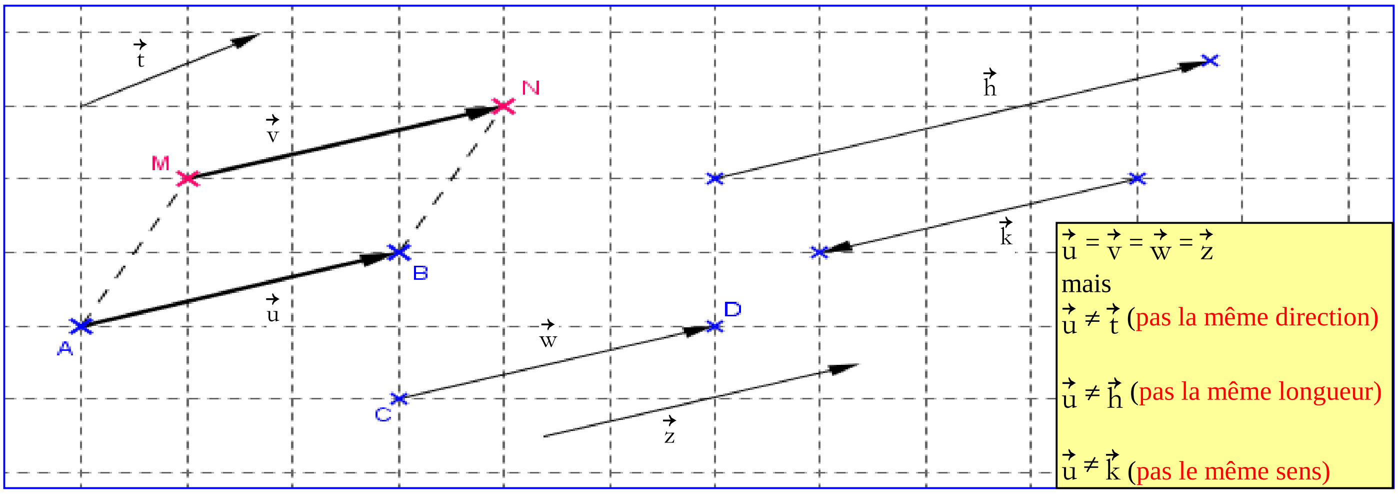
> **$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si les segments [AD] et [BC] ont le même milieu.**

Autrement dit :

Propriété 3 :

> **$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si**
> - **(AB) et (CD) sont parallèles** (même direction)
> - **les longueurs AB et CD sont égales,**
> - **$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ vont dans le même sens.**

On note les vecteurs à l'aide d'une flèche et de 2 points correspondant ~~aux~~ à des extrémités ou à l'aide d'une seule lettre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{AB}, ...)$.



d) <u>Remarque 1 :</u> Le vecteur $\vec{u}$ n'est pas fixe, on peut le dessiner n'importe où sur une feuille (voir graphique)

<u>Remarque 2 :</u> Le **<u>vecteur nul</u>, noté $\vec{0}$**, est le vecteur associé à la translation transformant A en A.

Donc $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$.

e) <u>Définition 3 :</u> Le **<u>vecteur opposé</u>** au vecteur $\overrightarrow{AB}$, noté $-\overrightarrow{AB}$, est le vecteur associé à la translation qui transforme B en A. C'est donc le vecteur $\overrightarrow{BA}$. Conclusion : $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.
Entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ seul le sens change (même direction et même longueur).

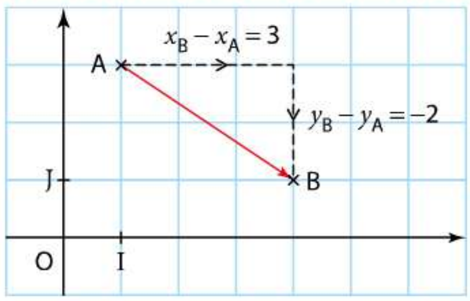
<u>III Coordonnées d'un vecteur</u>.

Recopier le haut de la p. 314
Exo résolu n° 3 p.315 + n°39 p.326 + n° 81 et 82 p.330
+ Faire n°15-19-20 p.324 + n°33 à 36 p.326

Définition Dans un repère (O, I, J), soit $\vec{u}$ un vecteur et $M(x\,;y)$ le point tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. Les coordonnées de $\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Propriété Dans un repère, si $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

On retient : « **extrémité moins origine** »



EXEMPLES

- Sur le graphique ci-dessus, A(1 ; 3) et B(4 ; 1) donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4-1 \\ 1-3 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$
- Dans un repère (O, I, J), $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; le vecteur $\vec{0}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

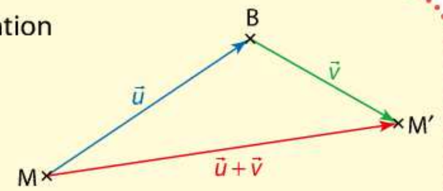
<u>Démonstration</u>
Soit $M(x\,;y)$ le point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. Alors [OA] et [BM] ont le même milieu.
Les coordonnées du milieu de [OA] sont $\left(\frac{x_A}{2}\,;\frac{y_A}{2}\right)$ et celles du milieu de [MB] sont $\left(\frac{x_B + x}{2}\,;\frac{y_B + y}{2}\right)$. Donc $\frac{x_B + x}{2} = \frac{x_A}{2}$ et $\frac{y_B + y}{2} = \frac{y_A}{2}$ d'où $x = x_B - x_A$ et $y = y_B - y_A$.

Propriété Deux vecteurs sont égaux *si et seulement si* ils ont les mêmes coordonnées dans un repère du plan.

IV Addition de vecteurs

Recopier le bas de la p. 314
Exo résolu n° 4 p.315 + Faire n°59-58 p.328

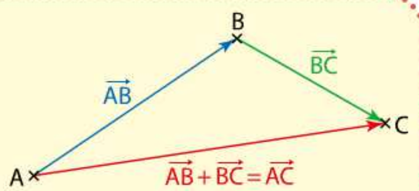
Propriété et définition En enchaînant la translation de vecteur $\vec{u}$ et celle de vecteur $\vec{v}$ on obtient une nouvelle translation. Le vecteur qui lui est associé est appelé somme de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ et noté $\vec{u}+\vec{v}$



L'ordre n'a pas d'importance. Autrement dit, $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$.
On peut enchaîner trois translations ou plus et obtenir par exemple $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$

Relation de Chasles
Pour tous points du plan A, B, C :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

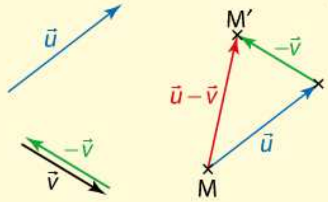


Propriété Dans un repère du plan, si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$.

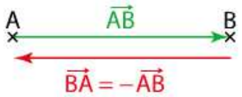
V Différence de 2 vecteurs

Recopier le haut de la p. 316
Exo résolu n° 5 p.317 + Faire n°60-61-62 p.328

Définitions
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
- Le vecteur opposé du vecteur $\vec{v}$, noté $-\vec{v}$, est le vecteur tel que $\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0}$.
- Le vecteur $\vec{u}-\vec{v}$ est défini par $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$.



EXEMPLE
Pour tous points A et B, $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$.



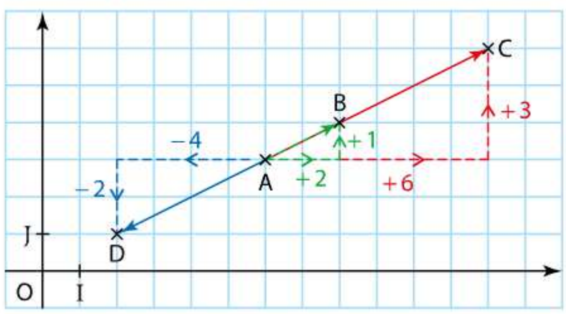
Propriété
Dans un repère du plan, si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors $-\vec{v}\begin{pmatrix}-x'\\-y'\end{pmatrix}$ et $\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix}x-x'\\y-y'\end{pmatrix}$.

VI Multiplication d'un vecteur par un nbr.

Recopier le bas de la p. 316
n°3 p.308
Exo résol n°6 p.317 + Faire n°16 p.324 + n°65 à 69 p.329

Définition
Soit $\vec{u}$ un vecteur et k un nombre réel. Dans un repère, si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, le vecteur noté $k\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$ dans le même repère.

EXEMPLE
Soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et les points C et D tels que $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}=-2\overrightarrow{AB}$.
- $3\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\times2\\3\times1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$.
- $-2\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\times2\\-2\times1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$.



Construction géométrique de $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ (admise) :
- **Si $k > 0$** : M appartient à la demi-droite [AB) et AM = $k \times$ AB
- **Si $k < 0$** : M appartient à la droite (AB) mais est de l'autre côté de B par rapport à A et AM = $(-k) \times$ AB.

Les propriétés de calcul sont analogues à celles utilisées en calcul numérique.

Propriétés
Si k et k' sont deux nombres réels et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, alors :
- $(k+k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$
- $k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.

EXEMPLE $3\left(2\,\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}\right) = 6\,\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CD}$; $5\,\vec{u} - 3\,\vec{u} = (5-3)\vec{u} = 2\vec{u}$.

VII Vecteurs colinéaires.

Recopier le haut de la p. 318
Exo résolu n°7 p.319 + Faire exos n°18 p.324 + n°71 à 73 p.330

Définition
Deux vecteurs sont colinéaires *si et seulement si* l'un est le produit de l'autre par un réel.

EXEMPLE
- $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\vec{v} = -\frac{3}{2}\vec{u}$.
- Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à n'importe quel vecteur $\vec{u}$ car $\vec{0} = 0\vec{u}$.

Propriété Dans un repère, les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires :

1. *si et seulement si* leurs coordonnées sont proportionnelles ;
2. *si et seulement si* $xy' = x'y$.

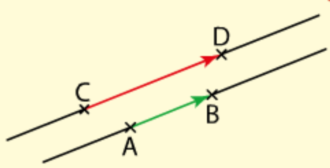
x	x'
y	y'

Démonstration
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires *si et seulement si* il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.
C'est dire qu'il existe k tel que $x = kx'$ et $y = ky'$, ou tel que $x' = kx$ et $y' = ky$.
Ceci signifie que les coordonnées des vecteurs sont proportionnelles.
Ceci revient encore à dire que les « produits en croix » sont égaux.

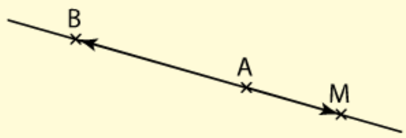
VIII Parallélisme et alignement.

Recopier le bas de la p. 318
Exos résolus n°8-9-10 p.319-320 + n°75 p.330
n°79 p.330 + **Faire n°76-77 p.330**

Propriété
Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles *si et seulement si* les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.



Propriété
Trois points A, B, M du plan sont alignés *si et seulement si* les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
Autrement dit, un point M appartient à une droite (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

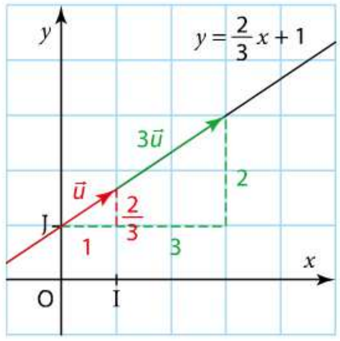


Démonstration

Pour A, B, M distincts, A, B et M sont alignés *si et seulement si* (AB) et (AM) sont parallèles, c'est-à-dire *si et seulement si* $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires, par la propriété précédente.

Définition et propriété

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ ou tout autre vecteur non nul colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ est un **vecteur directeur** de la droite (AB).
- Un vecteur directeur de la droite d'équation $y = ax + b$ (a, b réels) est le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$.



EXEMPLE

La droite $d : y = \frac{2}{3}x + 1$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ mais aussi $3\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, plus facile à tracer !

Travailler les pages 332 et 334

<u>Compléments</u> : 2 vecteurs non nuls $\vec{u}$ $(x\,;y)$ et $\vec{v}$ $(x'\,;y')$ sont colinéaires **<u>ss</u>**i l'une des 6 conditions ci-dessous est vérifiée :

- Ils ont la même direction,
- Leurs droites supports sont parallèles,
- Il existe un réel k non nul tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$,
- Les coordonnées sont proportionnelles entre elles,
- $xy' = yx'$,
- $xy' - yx' = 0$.

$\vec{u}$	$\vec{v}$
x	x'
y	y'