Chap XII

- **Fonctions du 2^{nd} degré**
- **Fonctions homographiques**

I Fonctions polynômes de degré 2

Faire Acti 1 p.106 + n°36 p.122 + n°92 p.127

1°) Définition : Une fonction polynôme de degré 2 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c réels (a≠0). C'est la **forme développée** de f.

Exemples :

$f(x) = 2x^2 - 7x + 5/2$	$a = 2$	$b = -7$	$c = 5/2$.
$g(x) = -x^2 + \pi$	$a = -1$	$b = 0$	$c = \pi$.
$h(x) = x^2 - 2x$	$a = 1$	$b = -2$	$c = 0$.
$k(x) = (x-2)(2x+5)$	$a = 2$	$b = 1$	$c = -10$.
$l(x) = -3(x+1)^2 - 5$	$a = 3$	$b = -6$	$c = -8$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x(-7x^2 + 5x) + 1 \\ g(x) = \quad -7x + \pi \end{array}\right\} \text{ ne sont pas des fonctions polynômes de degré 2.}$$

2°) Forme canonique : Toute fonction polynôme de degré 2 peut toujours s'écrire sous la forme $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ (avec a, α et β, 3 réels dont a≠0). C'est la **forme canonique** de $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Réciproquement, toute forme canonique donnera une expression de degré 2.

Exemples : $f(x) = (x-5)^2 - 11 = x^2 - 10x + 14$ donc $a = 1$, $\alpha = +5$ et $\beta = -11$.

$g(x) = (x+4)^2 - 9 = x^2 + 8x + 7$ donc $a = 1$, $\alpha = -4$ et $\beta = -9$.

$h(x) = 2(x-3)^2 - 18 = 2x^2 - 12x$ donc $a = 2$, $\alpha = 3$ et $\beta = -18$.

3°) Représentation graphique :

> Soit f une fonction polynôme de degré 2.
> La représentation graphique de f dans un repère orthogonal est une **parabole de sommet S** (α ; β), d'axe de symétrie Δ : $x = \alpha$ (//à (Oy)) et qui coupe l'axe (Oy) en un unique point C(0 ; c).
> Enfin, le tableau de variation s'obtient en fonction du signe de a.

avec a < 0

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Variation de $f(x)$	↗	β	↘

La parabole est "tournée vers le bas" et S est un Maximum.

avec a > 0

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Variation de $f(x)$	↘	β	↗

La parabole est "tournée vers le haut" et S est un minimum.

4°) Forme factorisée :

> On peut ***parfois*** **factoriser** f sous la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les abscisses des points d'intersection entre la parabole et l'axe (Ox).
> Cela n'est possible que lorsque la parabole coupe au moins une fois l'axe horizontal !!!

Exemples : $f(x) = 2(x+2)^2 + 4$ ne peut être factorisé car le minimum S (– 2 ; 4) est au dessus de l'axe (Ox).

$g(x) = 8 - 2(x-1)^2$. La parabole $P_1 : y = g(x)$ coupe l'axe (Ox) 2 fois en I (– 1 ; 0) et J (3 ; 0)
donc $g(x) = -2(x+1)(x-3)$ (*aussi égal à* $-2x^2 + 4x + 6$).

$h(x) = x^2 - 6x + 9$. La parabole $P_2 : y = h(x)$ ne coupe l'axe (Ox) qu'une seule fois en I (3 ; 0)
donc $h(x) = (x-3)^2 = (x-3)(x-3)$.

$k(x) = -(x+3)^2 - 1$ ne peut être factorisé car le maximum S (– 3 ; – 1) est en dessous de (Ox).

Faire n°39 p.122 + n° 93 p.127

II   Quelle forme choisir ? Voir Fiche TD1

Faire n°3 p.104 + n°9 p.120 + n°27 p.122

III   Fonctions homographiques

Faire n°3 p.106 + n°8 p.114 + n°57 p.125

1°) Définition : Une fonction homographique est une fonction $x \longmapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (a,b,c, d réels et c≠0), ad-bc ≠0.

Elle est définie en tout réel x tel que le dénominateur cx + d ne s'annule pas.

Exemples : $f(x) = \dfrac{8x + 14}{x + 2}$ est une fonction homographique définie pour tout nombre $x \neq -2$.

$h(x) = \dfrac{-6x - 5}{2x}$ est une fonction homographique définie pour tout nombre non nul.

$g(x) = \dfrac{10x - 50}{x - 6}$ est une fonction homographique définie pour tout nombre $x \neq 6$.

Remarques : 1- Il faut c ≠ 0 car sinon f(x) se simplifie et donne une fonction affine représentée par une droite. représentée par une droite \\ (Ox).

2°) Représentation graphique : Dans un repère orthonormal, on obtient des hyperboles ayant un centre de symétrie le point Ω .

Ci-dessous, les courbes des fonctions f, g et h de l'exemple précédent.