Chap XIV

- Equations de droites
- Systèmes d'équations à 2 inconnues

# I Équations de droites

## I.1 Caractérisation analytique d'une droite

**Théorème 1**
Soit $c$ un réel.

- ➤ Tout droite parallèle à l'axe des ordonnées a pour équation $x = c$,
- ➤ L"ensemble des points $M(x;y)$ tels que $x = c$ est une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

**Théorème 2**
Soient $m$ et $p$ des réels.

- ➤ Tout droite non parallèle à l'axe des ordonnées est de la forme $y = mx + p$,
- ➤ L"ensemble des points $M(x;y)$tels que $y = mx + p$ est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

**Remarque 1**

- Le réel $m$ s'appelle le coefficient directeur,
- Le réel $p$ est l'ordonnée à l'origine.

**Exemple 1**
Pour chacune des équations suivantes, déterminer s'il existe le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la droite :

| | | | |
|---|---|---|---|
| ➔ $5x + y = -2$ | $y = -5x - 2$ | $m = -5$ | $p = -2$ |
| ➔ $2x - 3y = 1$ | $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ | $m = \frac{2}{3}$ | $p = -\frac{1}{3}$ |
| ➔ $2x + 3y = 7 - 5x + 3y$ | $x = 1$ | Droite parallèle à l'axe des ordonnées | |

**Remarque 2**
Une équation de droite peut toujours s'écrire sous la forme $ax + by + c = 0$, avec $(a;b) \neq (0;0)$ : c'est ce qu'on appelle l'équation cartésienne de la droite.

## I.2 Coefficient directeur

**Définition 1**
*Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points d'une droite $\mathcal{D}$, le coefficient directeur se calcule grâce à la formule :*

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Comment déterminer l'équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par deux points $A$ et $B$ ?

On considère la droite $\mathcal{D}$ passant par $A\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$.

Méthode 1 : à partir de $m$ et $p$ ou Méthode 2 : avec des vecteurs

**Méthode 1 : à partir de $m$ et $p$**

La droite $D$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, elle a donc pour équation $y = mx + p$.

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5+1}{-1-2} = -2$$

$\mathcal{D}$ passe par le point $A(2;-1)$ d'où :
$y_A = mx_A + p$
$\Rightarrow y_A = -2x_A + p$
$\Rightarrow -1 = -2 \times 2 + p$
$\Rightarrow p = 3$

la droite $\mathcal{D}$ a pour équation réduite :
$y = -2x + 3$

**Méthode 2 : avec des vecteurs**

Soit $M(x;y)$ un point de la droite $\mathcal{D}$, alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x_M - x_A\\y_M - y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-2\\y+1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires
$\iff (-3) \times (y+1) - 6 \times (x-2) = 0$
$\iff -3y - 3 - 6x + 12 = 0$
$\iff -6x - 3y + 9 = 0$

la droite $\mathcal{D}$ a pour équation cartésienne :
$2x + y - 3 = 0$

### I.3 Droites parallèles, droites sécantes

**Propriété 1**
Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont :

- parallèles si et seulement si $m = m'$,
- sécantes si et seulement si $m \neq m'$.

**Exemple 2**
Déterminer une équation de la droite $\mathcal{D}$ parallèle à la droite $\mathcal{D}'$ d'équation $y = 2x - 3$ passant pas le point $A(1;5)$.

- La droite $D$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, elle a donc pour équation $y = mx + p$.
- $m = m' = 2$
- $\mathcal{D}$ passe par le point $A(1;5)$ d'où :
  $y_A = mx_A + p$
  $5 = 2 \times 1 + p$
  $p = 3$
- la droite $\mathcal{D}$ a pour équation $y = 2x + 3$

### I.4 Représentation graphique

COMMENT TRACER LA REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE DROITE ?

MÉTHODE PAR CALCUL DE COORDONNÉES DE POINTS APPARTENANT À LA DROITE

Choisir deux valeurs de $x$ : $x_1$ et $x_2$,
calculer $y_1$ et $y_2$,
placer les points $A(x_1;y_1)$ et $B(x_2;y_2)$ dans le plan muni dun repère $(O;I;J)$
tracer la droite $(AB)$

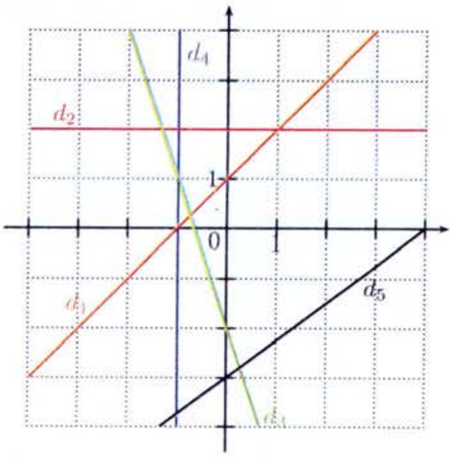
ou

MÉTHODE PAR UTILISATION DU COEFFICIENT DIRECTEUR ET DE L'ORDONNÉE À L'ORIGINE

Dans une repère $(O;I;J)$, placer le point $P$ de coordonnées $P(0;p)$,
à partir de ce point, tracer le vecteur $\overrightarrow{v}(1;m)$ ce qui nous donne un second point $M$,
tracer la droite $(MP)$.

**Exemple 3**
Représenter graphiquement les droites déquation :

- $d_1 : y = x + 1$
- $d_2 : y = 2$
- $d_3 : y = -3x - 2$
- $d_4 : x = -1$
- $d_5 : y = \frac{3}{4}x - 3$




## II Système de deux équations à deux inconnues

### II.1 Définition

**Définition 2**
*Résoudre le système linéaire* $(S)$ : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ *c'est trouver tous les couples de réels* $(x;y)$ *appelés solutions du système qui vérifient à la fois les deux équations.*

**Exemple 4**
Soit $(S)$ le système $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 4y = 6 \end{cases}$

- Le couple $(2;1)$ est une solution de $(S)$ car :
- $\begin{cases} 2 \times 2 + 1 = 5 \\ 2 + 4 \times 1 = 6 \end{cases}$

## II.2 Interprétation graphique

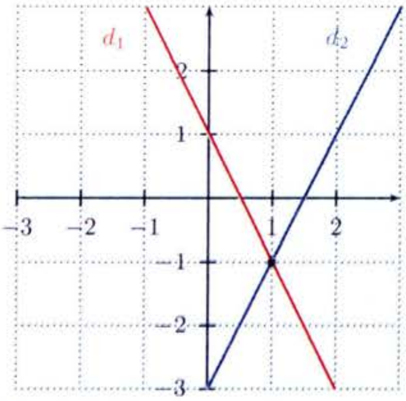
**Théorème 3**

Les équations $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ définissent, dans un repère, deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
Résoudre le systèmes $(S)$ revient à trouver les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

- Si $ab' - a'b \neq 0$, les droites ne sont pas parallèles et le système admet une solution unique,
- Si $ab' - a'b = 0$ les droites sont parallèles (strictement ou non) et le système admet aucune solution ou une infinité de solutions.

**Exemple 5**

On considère le système $S_1$ : $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$




- $ab' - a'b = 2 \times 1 - (-2) \times 1 = 4 \neq 0$
  les droites sont donc sécantes.
- on trace $d_1 : y = -2x + 1$ et $d_2 : y = 2x - 3$,
- on lit le point d'intersection : $\mathcal{S} = \{(1; -1)\}$.

## II.3 Méthodes de résolution par le calcul

- Résoudre le système $(S)$ : $\begin{cases} 4x + y = 7 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$ par **substitution**.

  Il s'agit d'exprimer une inconnue en fonction de l'autre à l'aide d'une des deux équations et de la remplacer par l'expression obtenue dans l'autre équation :

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -4x + 7 \\ 3x - 2(-4x + 7) = 8 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -4x + 7 \\ 3x + 8x = 8 + 14 \end{cases}$$

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -4x + 7 \\ 11x = 22 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -4 \times 2 + 7 \\ x = 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

D'où : $\mathcal{S} = \{(2; -1)\}$

- Résoudre le système $(S)$ : $\begin{cases} 2x - 3y = 8 & (L1) \\ 5x + 4y = -3 & (L2) \end{cases}$ par **combinaison linéaire**.

  On multiplie la première équation par 5 et la deuxième par $(-2)$ de manière à éliminer la variable $x$ et on additionne les deux équations membres à membres :

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} 10x - 15y = 40 & (5L1) \\ -10x - 8y = 6 & (-2L2) \end{cases} \qquad \overline{\quad -23y = 46 \quad}$$

On obtient $y = -2$ et on remplace dans l'une des deux équations :

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ 2x - 3 \times (-2) = 8 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ 2x = 8 - 6 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

D'où $\mathcal{S} = \{(1; -2)\}$

- On peut enfin utiliser la méthode par combinaison linéaire afin de trouver directement les 2 variables :

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} 10x - 15y = 40 & (5L1) \\ -10x - 8y = 6 & (-2L2) \end{cases} \qquad \overline{\quad -23y = 46 \quad} \qquad y = -2$$

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} 8x - 12y = 32 & (4L1) \\ 15x - 12y = -9 & (3L2) \end{cases} \qquad \overline{\quad 23x = 23 \quad} \qquad x = 1$$

D'où $\mathcal{S} = \{(1; -2)\}$

**Remarque 3**

La méthode par substitution n'est à utiliser (et encore ...) que lorsqu'une inconnue s'exprime *très facilement* en fonction de l'autre.