Chap IX

PROBABILITES

I Le vocabulaire des probabilités

Vocabulaire	Signification	Exemple
Expérience aléatoire	Lorsque qu'une expérience a plusieurs issues et que l'on ne peut ni prévoir, ni calculer laquelle de ces issues sera réalisée, on dit que c'est une expérience aléatoire.	Un sac contient 7 boules numérotées : quatre bleus B_1 ; B_2 ; B_3 et B_4 et trois rouges R_1 ; R_2 et R_3. Tirer une de ces boules et noter sa couleur **et** son numéro est une expérience aléatoire.
Issues ou éventualités	C'est un des résultats possibles de l'expérience aléatoire.	Ex : obtenir la boule B_2. Il y a 7 issues possibles.
L'ensemble des issues (ou univers) noté Ω.	C'est l'ensemble de toutes les issues de l'expérience aléatoire.	$\Omega = \{B_1 ; B_2 ; B_3 ; B_4 ; R_1 ; R_2 ; R_3\}$
Événement	Un événement A est une partie de l'univers formée des issues favorables à A Un événement peut être décrit par une phrase ou par un ensemble.	A : « obtenir un numéro pair » $A = \{B_2 ; B_4 ; R_2\}$ Ici R_2 est une issue favorable B : « obtenir une boule bleue » $B = \{B_1 ; B_2 ; B_3 ; B_4\}$
Événement élémentaire	C'est un événement ayant une seule issue favorable. La partie de **Ω** correspondante n'a qu'un seul élément.	C : « obtenir le numéro 4 » $C = \{B_4\}$
Intersection d'événements $A \cap B$	C'est l'**intersection** des ensembles A et B. C'est l'événement constitué de toutes les issues favorables à la fois à l'événement A et à l'événement B. On dit aussi « A **et** B »	$A \cap B$: « Obtenir une boule bleue **et** paire » $A \cap B = \{B_2 ; B_4\}$
Réunion d'événements $A \cup B$	C'est la **réunion** des ensembles A et B. C'est l'événement constitué de toutes les issues favorables à l'un au moins des événements A ou B. On dit aussi « A **ou** B » (ou inclusif)	$A \cup B$: « Obtenir une boule bleue **ou** paire » $A \cup B = \{B_1 ; B_2 ; B_3 ; B_4 ; R_2\}$
Événements incompatibles ou disjoints	Ce sont deux événements n'ayant aucune issues en commun. Leur intersection est vide.	D : « obtenir une boule rouge » et C sont incompatibles (ou disjoints). $C \cap D = \varnothing$
$\overline{A}$ événement contraire de A	L'événement contraire de A, noté $\overline{A}$, est constitué de toutes les issues qui ne sont pas favorables à A. **Deux événements contraires sont incompatibles** et leur réunion est égale à **Ω**. $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$	$\overline{A}$: « Obtenir une boule impaire » $\overline{A} = \{B_1 ; B_3 ; R_1 ; R_3\}$
Événement impossible	C'est un événement qui ne contient pas d'issue favorable. C'est l'ensemble vide, noté : ∅	E : « obtenir une boule verte » $E = \varnothing$
Événement certain	C'est un événement dont toutes les issues sont favorables. C'est l'univers : **Ω**.	F : « Obtenir un numéro inférieur à 5 » F = **Ω**.

II Loi de probabilités **Faire Exo corrigé n°1 p.199 + n°8 p.208**

1) Définition : On présente une loi de probabilité à l'aide d'un tableau listant toutes les issues et leur probabilité:

Issues	e_1	…	e_i	…	e_n	n est le nombre d'issues
Probabilité	p_1	…	p_i	…	p_n	Il faut $\Sigma\ p_i = 1$

Définir une **loi de probabilité** sur l'ensemble $\Omega = \{e_1 ; .. ; e_i ; … ; e_n\}$ c'est associer à chaque issue e_i d'une expérience aléatoire un réel p_i positif ou nul de sorte que : $p_1 + … + p_i + … + p_n = 1$.
Le nombre p_i est appelé probabilité de l'issue e_i.

Lorsqu'on effectue un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un événement se rapproche d'une fréquence théorique appelée probabilité (*voir chap simulation*). On peut cependant obtenir la probabilité d'un événement à partir de considérations de symétries ou géométriques (dé, cible, …) **Faire Exos n°3 p.199**

Exemples : ① Un sac contient des boules numérotées indiscernables au toucher, 5 sont bleues B_1 ; B_2 ; B_3 ; B_4 et B_5, 3 sont rouges R_1 ; R_2 et R_3 et 2 sont vertes V_1 et V_2. On tire une boule au hasard **et on note sa couleur**.

a) Quelle loi de probabilité décrit cette situation ?

Issues	B	R	V	$\Omega = \{B ; R ; V\}$
Probabilité	0,5	0,3	0,2	On a bien $\Sigma\ p_i = 1$

b) Citer un événement élémentaire puis son contraire. Calculer leurs probabilités.
A : « obtenir une boule rouge » p(A) = 0,3
$\overline{A}$: « obtenir une boule bleue ou une verte » $p(\overline{A}) = 1 - 0,3 = 0,7$.

② On dispose du même sac qu'au ① et on tire une boule au hasard **on note cette fois son numéro.**

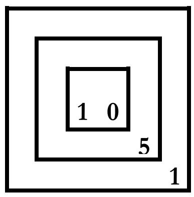
a) Quelle loi de probabilité décrit cette situation ?

Issues	1	2	3	4	5	$\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$
Probabilité	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1	On a bien $\Sigma\ p_i = 1$

b) Citer deux événements ayant la même probabilité.
B : « obtenir le n°2 » et C : « obtenir le n°3 ou le n°5 »
p(B) = 0,3 et p(C) = 0,2 + 0,1 = 0,3.

c) Citer deux événements incompatibles (def. p.1).
D : « obtenir un numéro pair » et F : « obtenir le n°5 ».

③ On imagine qu'un tireur tire parfaitement au hasard une flèche sur la cible ci-contre, sans la rater (!). Tous les carrés sont concentriques et leurs côtés ont pour mesure *a*, 2*a* et 3*a*. Quelle loi de probabilité décrit cette situation ?



La probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à l'aire de la zone.

Issues	10	5	1	$\Omega = \{10 ; 5 ; 1\}$
Proba	$\frac{a^2}{9a^2} = \frac{1}{9}$	$\frac{4a^2 - a^2}{9a^2} = \frac{3a^2}{9a^2} = \frac{1}{3}$	$\frac{9a^2 - 4a^2}{9a^2} = \frac{5a^2}{9a^2} = \frac{5}{9}$	$\Sigma\ p_i = 1$

2) Loi équirépartie : Lorsque les n issues d'une expérience aléatoire ont la même probabilité alors $p_i = \frac{1}{n}$, on dit qu'elles sont **équiprobables** et que la loi de probabilité sur Ω est **la loi équirépartie.**

Exemples : ① Au jeu de « Pile ou face », avec une pièce de monnaie supposée parfaite, on admet que les deux issues, P et F, sont équiprobables.
Ainsi la loi équirépartie décrit bien ce jeu et p(F) = p(P) = 1/2

② On tire une carte d'un jeu de 32 cartes bien battues.
Les 32 issues sont équiprobables et $p(e_i) = 1/32$.
Exos n°10-12-14 p.208

III Probabilité d'un événement **Exo corrigé n°4 p.201**

1) Propriété : **La probabilité d'un événement A, noté p(A), est égale à la somme des probabilités des issues qui composent cet évènement.**

Au ③, p(« obtenir un score multiple de 5 avec une flèche ») = p({5}) + p({10}) $= \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$

2) Propriété : **Lorsqu'il y a équiprobabilité,** $p(A) = \dfrac{\text{Nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles}}$.

Exemple du tableau I p.1 : p(A) = 3/7 p(B) = 4/7 p(C) = 1/7
p(D) = 3/7 p(E) = 0 p(F) = p(Ω) = 1.

3) Propriétés :

- La probabilité de **l'évènement certain est 1.** Donc p(Ω) = 1.
  Ex : Obtenir entre 1 et 6 en lançant un dé 6 faces.
- La probabilité de **l'évènement impossible est 0. p(∅) = 0**
  Ex : Obtenir 7 en lançant un dé 6 faces.
- Pour tout événement A, on a : $\mathbf{0 \leq p(A) \leq 1}$

4) Probabilité d'une réunion : Soit A et B deux événements quelconques. **Exos corrigés n°5 et 7 p.201-202**

On a : $\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).}$

Exemple du tableau I p.1 : $p(A \cup B) = 3/7 + 4/7 - 2/7 = 5/7$.

Cas particulier **:** Si les deux événements **A et B sont incompatibles,** alors leur intersection est vide et on a : $\mathbf{p(A \cup B) = p(A) + p(B).}$

Exemple du tableau du I : $p(C \cup D) = p(C) + p(D) = 1/7 + 3/7 = 4/7$.

5) Probabilité d'événements contraires : Soit A un événement et $\overline{A}$ **son événement contraire**. **Exos n°9-15 p.208**

$\boxed{p(\overline{A}) = 1 - p(A)}$ **et** $p(A) = 1 - p(\overline{A})$.

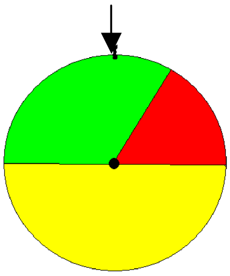
démo : A et $\overline{A}$ sont incompatibles et leur réunion est **Ω**.

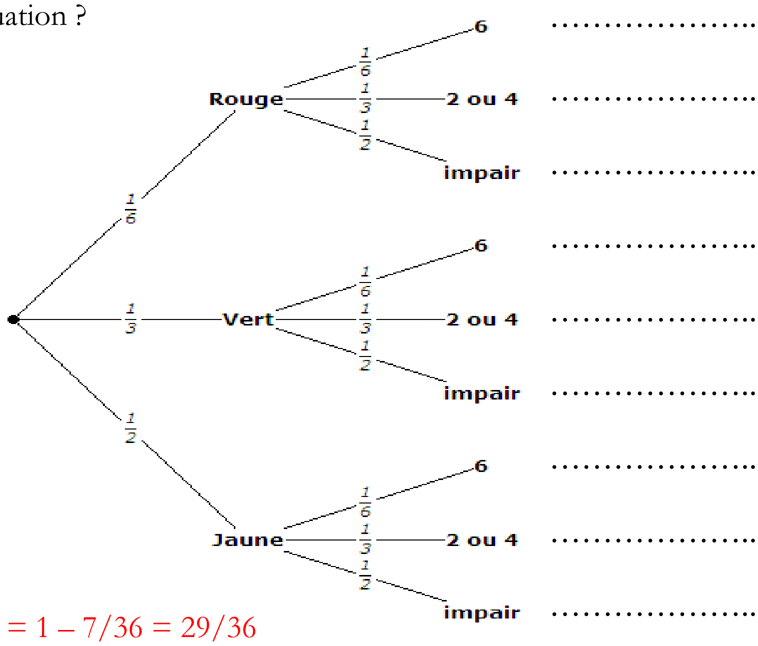
Donc $p(A) + p(\overline{A}) = 1$. CQFD

6) Arbre pondéré :

Exemple : Un forain propose le jeu suivant : "À tous les coups l'on gagne !" Le joueur fait tourner une roue divisée en secteurs de mesures 60°, 120° et 180° **puis** il lance un dé équilibré.
Il gagne un gros lot **si** la couleur sortie sur la roue est le rouge **et si** le dé sort un six.
Il gagne un petit lot **si** la couleur sortie sur la roue est le vert **et si** le dé sort un numéro impair.
Dans les autres cas, il gagne une babiole.

a) Quelle est la probabilité de l'événement G : « gagner un gros lot » ?
b) " " " " P : « gagner un petit lot » ?
c) " " " " B : « gagner une babiole» ?
d) Quelle loi de probabilité décrit cette situation ?





a) p(G) = 1/36
b) p(P) = 1/6
c) p(B) = 1 – p(G) – p(P) = 1 – 1/36 – 1/6 = 1 – 7/36 = 29/36

d)

Issues	G	L	B
Probabilité	1/36	6/36	29/36

On a bien $\Sigma\, p_i = 1$

Chaque branche de l'arbre conduit à un événement et la probabilité de cet événement est le produit des probabilités rencontrées le long des branches.