Puissances - Ecriture scientifique

I. Notation a^n avec a un nombre entier relatif

Définition (a^n)

Pour écrire $\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$, on note « a^n ».

Définition (10^n)

Pour écrire $\underbrace{10 \times 10 \times 10 \times \cdots \times 10}_{n \text{ facteurs}}$, on note « 10^n ».

Exemple : $3^2 = 3 \times 3 = 9$,
$(-5)^3 = (-5) \times (-5) \times (-5) = -125$.

Exemple : $10^2 = 10 \times 10 = 100$,
$10^6 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1\,000\,000$.

II. Multiplication

Théorème

Quels que soient les nombres entiers m et n, on a

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

Théorème

Quels que soient les nombres entiers m et n, on a

$$10^m \times 10^n = 10^{m+n}.$$

Exemple : $2^3 \times 2^4 = \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{2^3} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2}_{2^4} = 2^7$

Exemple : $10^3 \times 10^2 = 1\,000 \times 100 = 100\,000 = 10^5$.

III. Puissance 0

Théorème

Par convention, on pose $a^0 = 1$.

Théorème

Par convention, on pose $10^0 = 1$.

Démonstration : La règle de multiplication pour les nombres strictement positifs, étendue au nombre 0 implique que $a^n \times a^0 = a^{n+0} = a^n$.
Ainsi, a^0 vaut obligatoirement 1 car $a^n \times 1 = a^n$. ∎

IV. Puissance négative

Théorème

On note $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Théorème

On note $10^{-n} = \dfrac{1}{10^n}$.

Démonstration : La règle de multiplication pour les nombres strictement positifs, étendue aux nombre négatifs implique $a^n \times a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^{n-n} = a^0 = 1$.
Donc, a^{-n} est l'inverse de a^n. ∎

Exemple : $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8} = 0,125$.
$10^{-3} = \dfrac{1}{10^3} = \dfrac{1}{1\,000} = 0,001$.

V. Division

Théorème

Quels que soient les entiers relatifs m et n,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Théorème

Quels que soient les entiers relatifs m et n,

$$\frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}.$$

Exemple : $\frac{2^2}{2^5} = 2^{2-5} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125.$

Exemple : $\frac{10^5}{10^2} = 10^{5-2} = 10^3 = 1\,000.$

VI. Puissance de puissance

Théorème

a, m et n étant des entiers relatifs, on

$$(a^m)^n = a^{m\times n}.$$

Théorème (Pour les puissances de 10)

Soient m et n deux entiers relatifs, on a

$$(10^m)^n = 10^{m\times n}.$$

Exemple : $(3^2)^3 = 3^{2\times 3} = 3^6.$

Exemple : $(10^{-2})^3 = 10^{-2\times 3} = 10^{-6}.$

VII. Ecriture scientifique

L'écriture scientifique est une forme d'écriture des nombres qui est utilisée pour représenter des nombres très grands ou très petits.

Définition :

L'écriture scientifique d'un nombre est de la forme a x 10^n où a est un nombre décimal qui n'a qu'un seul chiffre non nul avant la virgule.

Exemples :

789 s'écrit 7,89 x 10^{2} 0,0258 s'écrit 2,58 x 10^{-2}

Ordre de grandeur :

L' écriture scientifique d'un nombre permet d'avoir très rapidement une idée de l'ordre de grandeur d'un nombre.

156 000 000 000 000 000 000 est beaucoup moins parlant que 1,56 x 10^{20} *pour le comparer avec un autre grand nombre par exemple* .