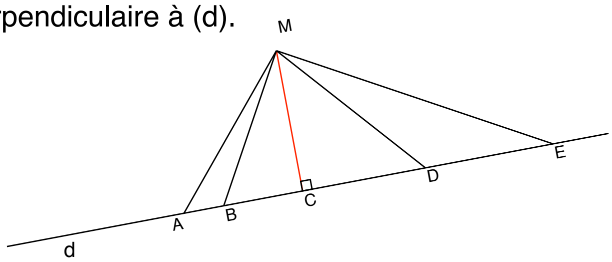
Distances - Inégalités

I. Distance d'un point à une droite

1. Introduction

A, B, C, D et E sont cinq points distincts alignés dans cet ordre sur une droite (d). M est un point n'appartenant pas à la droite (d), tel que (MC) est perpendiculaire à (d).

Montrons que MC est la distance la plus courte.

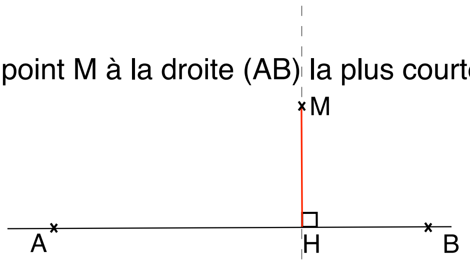


MAC est un triangle rectangle en C. [MA] étant l'hypoténuse, on peut affirmer que : MC < MA.

De même : le triangle MBC est un triangle rectangle en C, donc : MC < MB
le triangle MDC est un triangle rectangle en C, donc : MC < MD
le triangle MEC est un triangle rectangle en C, donc : MC < ME
Conclusion : **MC est la distance la plus courte**.

2. Définition

On appelle la distance du point M à la droite (AB) la plus courte distance du point M à un point de la droite (AB).



Par conséquence :

Le point de la droite (AB) le plus proche de M est le point H tel que la droite (MH) est perpendiculaire à la droite (AB).

Ainsi, **la distance MH est**, par définition, **la distance du point M à la droite (AB)**.

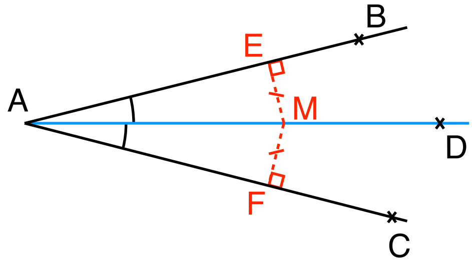
3. Caractérisation de la bissectrice d'un angle

Rappel :

La bissectrice d'un angle est l'ensemble de tous les points qui sont situés à égale distance des deux côtés de l'angle.

(AD) est la bissectrice de l'angle BAC on a :

mes $\widehat{BAD}$ = mes $\widehat{DAC}$



Propriété : Si on prend un point quelconque M de la bissectrice d'un angle, alors les distances qui séparent M au côté [AB] et au côté [AC] sont égales. (Dans la figure ci-dessus on a : ME = MF)

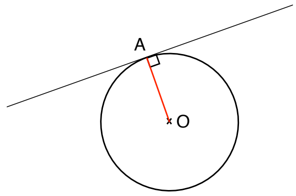
Réciproquement :

Si on prend un point situé à égale distance des côtés [AB] et [AC] d'un angle, alors ce point appartient à la bissectrice (AD) de cet angle.

4. Tangente d'un cercle en un point

Soient un cercle de centre O et A un point de ce cercle, la tangente à ce cercle au point A est **la droite perpendiculaire à [AO] qui passe par A**.

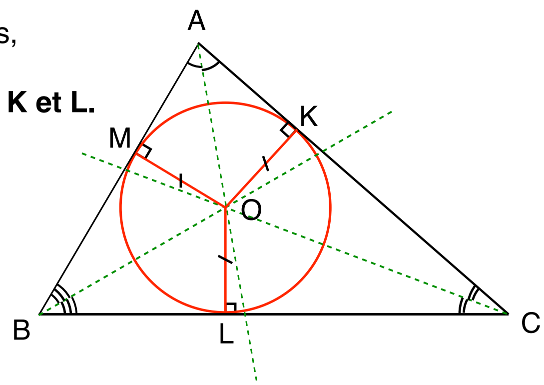
Remarque : La tangente à un cercle n'a qu'un seul et unique point commun avec ce cercle.



5. Cercle inscrit dans un triangle

Rappel : Dans un triangle, le point de concours des bissectrices de ses angles est le centre du cercle inscrit à ce triangle.

O étant le point d'intersection des bissectrices des angles,
OM = OK = OL - ce sont des rayons de ce cercle.
Les côtés du triangle sont tangents à ce cercle en M, K et L.



II. Inégalités

Rappels : $a < b$ veut dire : « a est strictement inférieur à b ».
$x > y$ veut dire : « x est strictement supérieur à y ».
$m \leq n$ veut dire : « m est inférieur ou égal à n ». C'est-à-dire : $m < n$ ou $m = n$.
$i \geq j$ veut dire : « i est supérieur ou égal à j ». C'est-à-dire : $i > j$ ou $i = j$.
« ranger dans l'ordre croissant » veut dire : « ranger du plus petit au plus grand ».
« ranger dans l'ordre décroissant » veut dire : « ranger du plus grand au plus petit ».

Propriétés

Si on ajoute ou si on soustrait un même nombre aux deux membres d'une inégalité, alors on ne change pas le sens de l'inégalité.

Si on multiplie ou si on divise par un même nombre positif non nul les deux membres d'une inégalité, alors on ne change pas le sens de l'inégalité.

Si on multiplie ou si on divise par un même nombre négatif non nul les deux membres d'une inégalité, alors on change le sens de l'inégalité.

Exemples :

Si $-5 < 9$ alors $-5 + 12,5 < 9 + 12,5$ (7,5 est bien plus petit que 21,5)
Si $47 > 19$ alors $47 - 6 > 19 - 6$ (41 est bien plus grand que 13)
Si $6 > 0,5$ alors $6 \times 3 > 0,5 \times 3$ (18 est bien plus grand que 1,5)

Si $-5 < 9$ alors $-5 \times (-2) > 9 \times (-2)$ En effet : $+10 > -18$